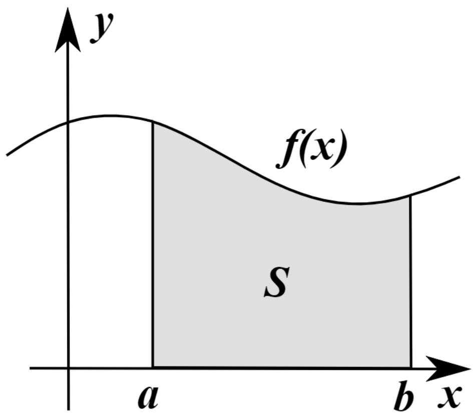
Kısaltma Listesi

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\subset$	Alt küme
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\forall$	Her(herhangi)
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$	Bir aralığın parçalanması
Δx_k	$[x_{k-1}, x_k]$ aralığının boyu
$\lVert P \rVert$	$\lVert P \rVert = max\{\Delta x_k : k = 1, 2, \dots, n\}$, P parçalanmasının normu
$\sum_{k=1}^{n} a_k$	$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$
$m_k(f)$	$m_k(f) = m(f, [[x_{k-1}, x_k]) = inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$
inf	Karşısında yazılan kümenin alt sınırlarının en büyüğü
sup	Karşısında yazılan kümenin üst sınırlarının en küçüğü
$M_k(f)$	$M_k(f) = M(f, [x_{k-1}, x_k]) = sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$
$A(f, P)$	Alt Darboux toplamı
$Ü(f, P)$	Üst Darboux toplamı
$R(f, P)$	Riemann toplamı
(P, ξ)	$[a, b]$ nin bir işaretlenmiş parçalanması
$\mathcal{R}[a, b]$	$[a, b]$ üzerinde Riemann anlamında integrallenebilir bütün fonksiyonlar kümesi

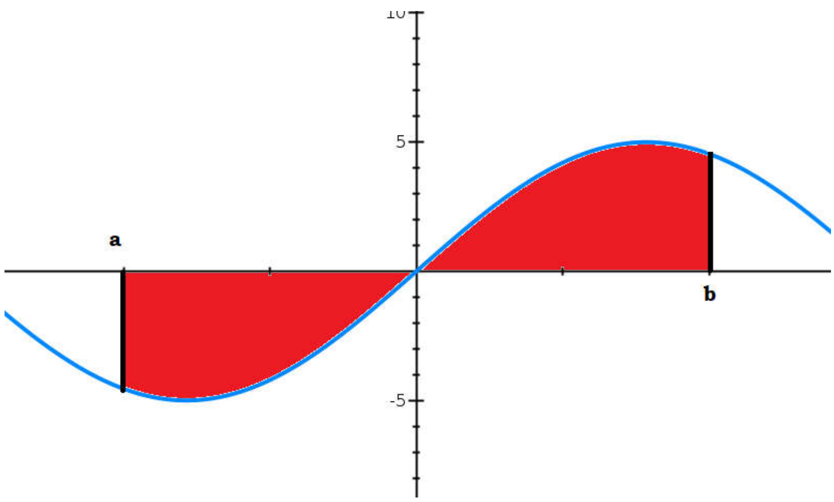
$\mathcal{B}(a,b)$	$[a,b]$ üzerinde sınırlı reel değerli bütün fonksiyonlar kümesi
$D(x)$	Dirichlet fonksiyonu
$w_k(f)$	$w_k(f)=w(f,[x_{k-1},x_k])=\sup\{\lvert f(x)-f(y)\rvert : x,y\in[x_{k-1},x_k]\}$, f nin $[x_{k-1},x_k]$ aralığı üzerindeki salınımıdır.
$\mathcal{P}$	$[a,b]$ aralığının bütün mümkün $\mathcal{P}$ parçalanmalarının kümesi
$\underline{I}(\bar{I})$	Sınırlı $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $[a,b]$ üzerindeki alt (üst) integrali
(P_n)	$[a,b]$ nin parçalanmalarının bir dizisi
$\Longrightarrow$	ise
$C[a,b]$	$[a,b]$ de sürekli reel değişkenli reel değerli fonksiyonlar kümesi
$w_f(\delta)$	f nin süreklilik modülü, $w_f:(0,b-a]\to\mathbb{R}^+, w_f(\delta)=sup\{\lvert f(x)-f(y)\rvert : \lvert x-y\rvert<\delta\}$
$\mu(\bar{J})$	$\bar{J}=[a,b]$ aralığının uzunluğu (ölçüsü) o, $\mu(\bar{J})=b-a$
$\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{J_k}$	$\overline{J_k}=[a_k,b_k], k\in\mathbb{N}$ aralıklar ailesinin birleşimi
$\mu(X)$	X kümesinin Lebesgue ölçüsü
$f\vert_{[c,d]}$	$[c,d]\subset[a,b]$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $[c,d]$ ye kısıtlanması

1.Giriş

$[a, b]$ kapalı bir aralık ve $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun grafiğini çizelim.



f' nin grafiğiyle x ekseni arasına sıkışan cebirsel alana dikkat edilirse "Cebirsel alan", x ekseninin altında kalan alanı negatif hesaplayacağından fonksiyonun x-ekseni ile beraber sınırlandırdığı bölgenin alanı bulunurken x-ekseni altında kalan bölgenin işareti negatif olacaktır. Örneğin, aşağıdaki cebirsel alan 0' dır.



Çünkü x ekseninin üstünde kalan alan, altındaki alana eşittir ve cebirsel olarak toplandığında bu iki alan sadeleşirler. Dolayısıyla negatif bir fonksiyonun cebirsel alanı negatif, pozitif bir fonksiyonun cebirsel alanı pozitif olacak.

İşte f' nin grafiğiyle x ekseni arasına sıkışan cebirsel alana f fonksiyonun a'dan b'ye integrali denir ve bu sayı

$$\int_a^b f(x)dx$$

olarak gösterilir.

Bu bitirme çalışmasında reel eksenin kapalı ve sınırlı aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sınırlı fonksiyonların Riemann (Belirli) integrali kavramı tanıtılacak; bu integralin özelliklerinden ve bazı uygulamalarından söz edilecektir. Bu sonuçların kapalı olmayan sınırlı ve sınırsız aralıklar üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar için genelleştirilmesi daha sonra verilecektir.

1.1. Temel Tanımlar ve Sonuçlar

Tanım 1.1.1: $[a,b](a,b\in\mathbb{R})$ aralığının $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ koşulunu sağlayan her,

$$P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$$

sonlu alt kümesine $[a,b]$ aralığının bir parçalanması (veya bölüntüsü); $k=0,1,2,\dots,n$ için x_k noktalarına bu parçalanmanın bölüm noktaları; ve yine $\forall k\in\{1,2,\dots,n\}$ için $[x_{k-1},x_k]\big((x_{k-1},x_k)\big)$ aralıklarına $[a,b]$ nin P parçalanmalarına karşılık gelen kapalı (açık) alt aralıkları adı verilir. $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}>0$ sayılarına $[x_{k-1},x_k]((x_{k-1},x_k))$ aralığının boyu (veya ölçüsü) denir.

$\Delta x_1,\dots,\Delta x_n$ sayılarının en büyüğüne P parçalanmasının normu (veya çapı) denir ve $\|P\|$ ile gösterilir. Şu halde $\|P\|=\max\{\Delta x_k : k=1,\dots,n\}$ dır. Eğer $\Delta x_1=\Delta x_2=\cdots=\Delta x_n$, yani $k=1,\dots,n$ için $\Delta x_k=\frac{b-a}{n}$, ise, P ye $[a,b]$ nin düzgün parçalanması adı verilir.

Örneğin $[0,2]$ aralığı için $P_1=\left\{0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2\right\}$, $P_2=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{17}{9},2\right\}$ ve $P_3=\left\{0,\frac{\sqrt{2}}{4},1,\frac{\pi}{2},\sqrt{3},2\right\}$ kümeleri birer parçalanıştır.

- $P_1=\left\{0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2\right\}$ için $s(P_1)=5$ olup kapalı alt aralıklar $\left[0,\frac{1}{2}\right],\left[\frac{1}{2},1\right],\left[1,\frac{3}{2}\right],\left[\frac{3}{2},2\right]$ bulunur. Bu alt aralıklar için boyları $\Delta x_1=\Delta x_2=\Delta x_3=\Delta x_4=\frac{1}{2}$ olur. $\|P_1\|=\frac{1}{2}$ olup P_1 düzgün bir parçalanıştır.
- $P_2=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{17}{9},2\right\}$ için $s(P_2)=7$ olup kapalı alt aralıklar $\left[0,\frac{1}{3}\right],\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right],\left[\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right],\left[\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right]$, $\left[\frac{4}{5},\frac{17}{9}\right],\left[\frac{17}{9},2\right]$ bulunur. Bu alt aralıklar için boyları

$\Delta x_1=\frac{1}{3},\ \Delta x_2=\frac{1}{6},\ \Delta x_3=\frac{1}{10},\ \ \Delta x_4=\frac{1}{5},\ \Delta x_5=\frac{49}{45},\ \Delta x_6=\frac{1}{9}$ olur. $\|P_2\|=\frac{49}{45}$ olup P_1 düzgün bir parçalanış değildir.

- $P_3=\left\{0,\frac{\sqrt{2}}{4},1,\frac{\pi}{2},\sqrt{3},2\right\}$ için $s(P_3)=6$ olup kapalı alt aralıklar $\left[0,\frac{\sqrt{2}}{4}\right],\left[\frac{\sqrt{2}}{4},1\right],\left[1,\frac{\pi}{2}\right],\left[\frac{\pi}{2},\sqrt{3}\right]$ ve $\left[\sqrt{3},2\right]$ bulunur. Bu alt aralıklar için boyları $\Delta x_1=\frac{\sqrt{2}}{4},\ \Delta x_2=\frac{4-\sqrt{2}}{4},\ \Delta x_3=\frac{\pi-2}{2},\ \Delta x_4=\frac{2\sqrt{3}-\pi}{2}$ ve $2-\sqrt{3}$ olur. $\|P_3\|=\frac{4-\sqrt{2}}{4}$ olup P_3 düzgün bir parçalanış değildir.

$a_1,a_2,\dots,a_n$ sayılarının toplamını, kısaca $\sum_{k=1}^{n}a_k$ (veya $\sum_{i=1}^{n}a_i$, $\sum_{s=1}^{n}a_s$ v.s) sembolü ile göstereceğiz. Buna göre,

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

olacaktır.

Tanım 1.1.2: $[a,b]\subset\mathbb{R}$ ve $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olsun. $[a,b]$ nin bir $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ parçalanması için $1\le k\le n$ olmak üzere

$m_k(f)=m(f,[x_{k-1},x_k])$ = inf $\{f(x):x\in[x_{k-1},x_k]\}$,

$M_k(f)=M(f,[x_{k-1},x_k])=\sup\{f(x):x\in[x_{k-1},x_k]\}\ k=1,\dots,n$

olsun.

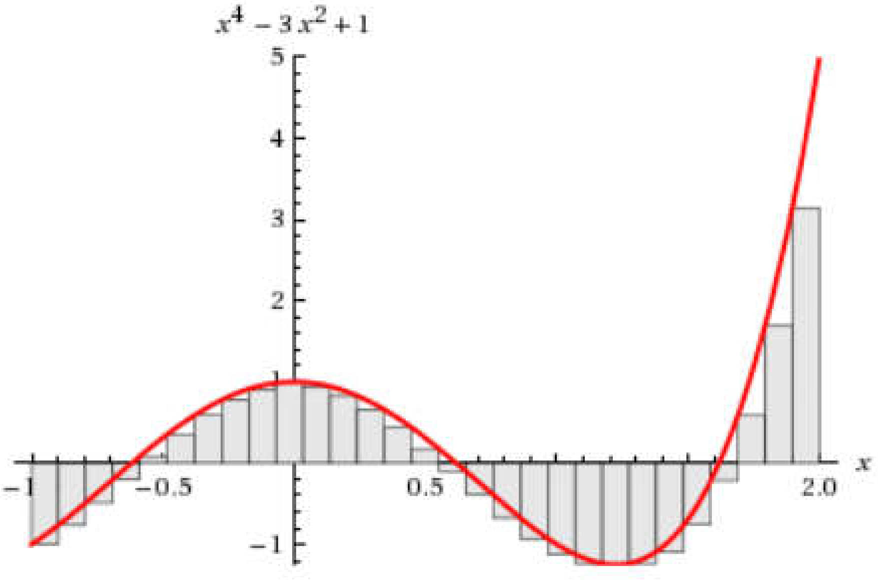
$$A(f,p)=\sum_{k=1}^{n}m_k(f)\Delta x_k\ \ ve\ \text{Ü}(f,p)=\sum_{k=1}^{n}M_k(f)\Delta x_k \tag{1.1}$$

toplamlarına sırasıyla f fonksiyonunun $[a,b]$ nin P parçalanmasına göre alt Darboux toplamı ve üst Darboux toplamı adı verilir. $1\le k\le n$ için ξ_k, $[x_{k-1},x_k]$ alt aralığında alınan herhangi bir nokta olmak üzere

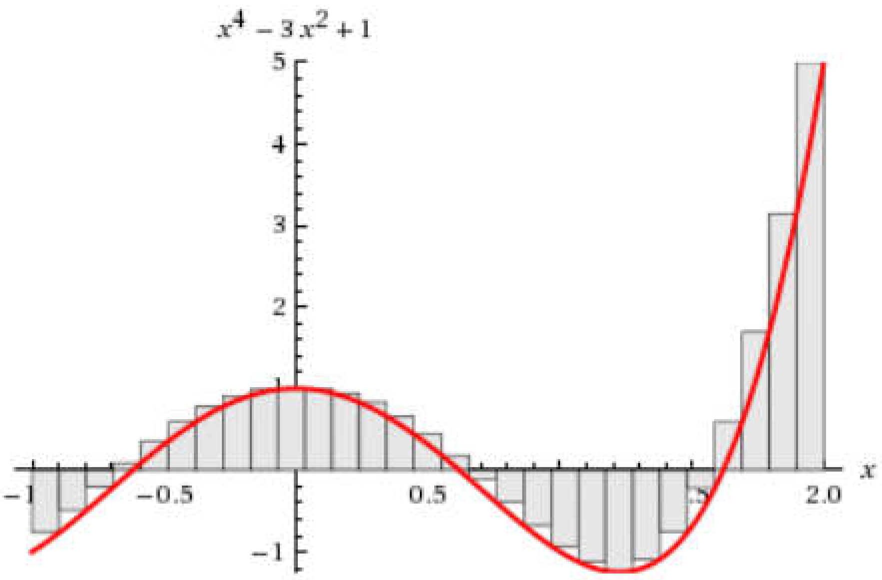
$$R(f,P)=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k \tag{1.2}$$

toplamına f fonksiyonunun $[a,b]$ nin P parçalanmasına göre Riemann toplamı (veya Riemann integral toplamı) adı verilir ve $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ sıralı n lisini bir ξ sembolü ile gösterilir.

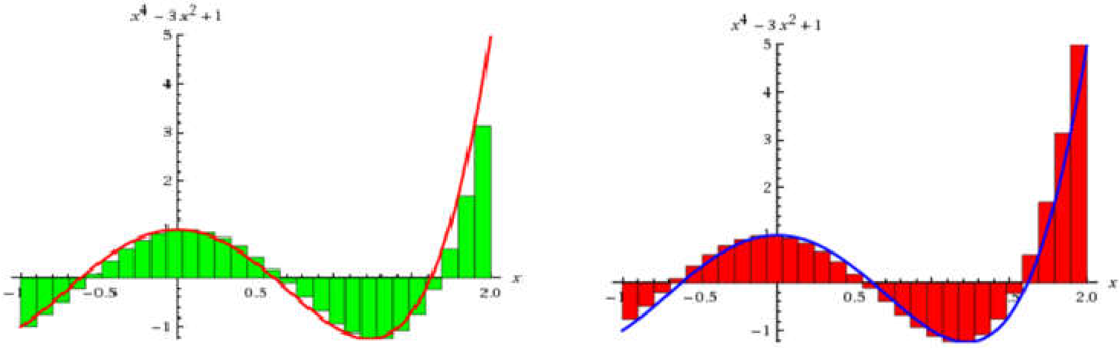
Örneğin, $f:[-1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-3x^2+1$ için $[-1,2]$ aralığının düzgün bir 30 elemanlı parçalanışı için alt Darboux toplamı ve üst Darboux toplamı



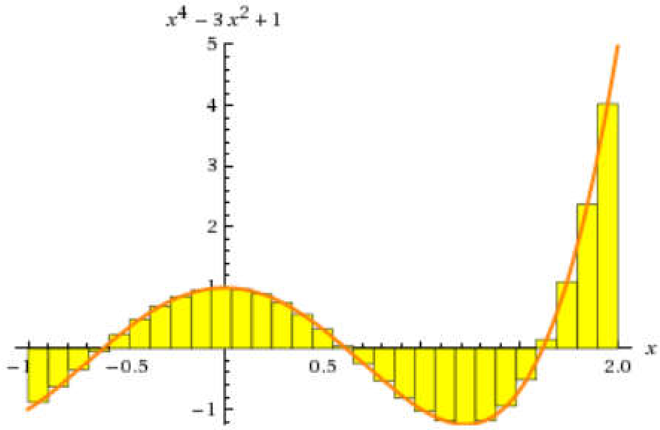
Şekil 1.1 : f fonksiyonunun alt Darboux toplamı



Şekil 1.2 : f fonksiyonunun üst Darboux toplamı



Şekil 1.3 : f fonksiyonunun sol ve sağ uç nokta kurallı Riemann toplamları



Şekil 1.4 : f fonksiyonunun orta nokta kurallı Riemann toplamı

Not: Sınırlı $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sabit tutulduğunda $A(f,P)$ ve $\ddot{U}(f,P)$ Darboux toplamları yalnızca $[a,b]$ nin P parçalanmasının, $R(f,P)$ Riemann toplamı ise hem P parçalanmasının hem de $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k](k = 1, \dots, n)$ olmak üzere $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ $n-$ lisinin seçilişine bağlıdır. Buna göre $R(f,P)$ toplamı çoğu kez $R(f,P,\xi)$ ile gösterilir.

Eğer, $[a,b]$ nin bir $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanması ve her bir $[x_{k-1}, x_k]$ aralığında herhangi bir ξ_k noktası seçilmişse $[a,b]$ nin bir işaretlenmiş (P,ξ) parçalanması verilmiştir diyeceğiz.

Sınırlı bir $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve [a, b] aralığının herhangi işaretlenmiş bir (P,ξ) parçalanması verilsin. $1 \le k \le n$ olmak üzere $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ için $m_k(f) \le f(\xi_k) \le M_k(f)$ olduğundan,

$$A(f,p) \le R(f,P,\xi) \le \ddot{U}(f,p) \quad (1.3)$$

olacağı açıktır.

Tanım 1.1.3: $[a,b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde sınırlı $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $[a,b]$ nin P parçalanması ve ξ ye bağımlı olmayarak,

$$\lim_{\|P\|\to 0} R(f,P,\xi) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = I \tag{1.4}$$

sonlu limiti varsa bu limite f nin $[a,b]$ üzerinde Riemann (veya Belirli) integrali denir ve bu limit $\int_a^b f(x)dx$ ile gösterilir. Bu durumda f, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilirdir (Riemann anlamında) denir. $a\ ve\ b$ sayılarına integralin sırası ile alt ve üst sınırları denir. Yukarıdaki (1.4) eşitliği şu anlamdadır: $\lim_{\|P\|\to 0} R(f,P,\xi) = I \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\|P\| < \delta$ olan her işaretlenmiş (P,ξ) parçalanması için $|R(f,P,\xi) - I| < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists \delta > 0$ vardır.

Tanım 1.1.4: $[a,b]$ aralığının $a = x_0^{(m)} < x_1^{(m)} < \cdots < x_{n_{m-1}}^{(m)} < x_{n_m}^{(m)} = b$ koşulunu sağlayan $P_m = \left\{x_0^{(m)}, x_1^{(m)}, \ldots, x_{n_m}^{(m)}\right\}, m = 1, 2, \ldots$ parçalanmaları ve $\xi_k^{(m)} \in \left[x_{k-1}^{(m)}, x_k^{(m)}\right]$, $\xi^{(m)} = \left(\xi_1^{(m)}, \ldots, \xi_{n_m}^{(m)}\right)$, $\Delta x_k^{(m)} = x_k^{(m)} - x_{k-1}^{(m)}$, $\|P\| = \max\{x_k^{(m)} : k = 1, \ldots, n\}$ olmak üzere $\lim_{m\to\infty} \|P_m\| = 0$ olsun. Bu durumda,

$$\lim_{m\to\infty} R\left(f, P_m, \xi^{(m)}\right) = I$$

sonlu limiti varsa, bu limite f' nin $[a,b]$ üzerinde Riemann integrali denir.

Yukarıdaki 1.1.3 ve 1.1.4 Tanımlarının denk olduğu fonksiyon limitinin Cauchy ve Heyne anlamında tanımlarının denkliğine benzer şekilde ispatlanabilir.

İleride $[a,b]$ üzerinde Riemann anlamında integrallenebilen reel değerli bütün fonksiyonlar kümesini $\mathcal{R}[a,b]$ ve $[a,b]$ üzerinde sınırlı reel değerli bütün fonksiyonlar kümesini de $\mathcal{B}[a,b]$ ile göstereceğiz.

Teorem 1.1.5 : $[a,b]$ üzerinde Riemann anlamında integrallenebilen her fonksiyon bu aralık üzerinde sınırlıdır.

İspat: Kabul edelim ki f, $[a,b]$ üzerinde sınırsız olsun, (P,ξ), $[a,b]$ nın işaretlenmiş herhangi bir parçalanması ve $R(f,P,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta \mathrm{x_k}$ olsun. f, $[a,b]$ üzerinde sınırsız olduğundan, bu fonksiyon $[x_{k-1}, x_k]$ aralıklarından en az biri üzerinde sınırsızdır. Bu aralık $[x_{k_0-1}, x_{k_0}]$ olsun. O zaman öyle bir $\xi_{k_0} = \widetilde{\xi_{k_0}} \in [x_{k_0-1}, x_{k_0}]$ noktası vardır ki, her $A > 0$ sayısı için

$$\left|f(\widetilde{\xi_{k_0}})\right| > \frac{1}{\Delta x_{k_0}}[\left|\sum_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\right| + A]$$

olur. O halde, $\tilde{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_{k_0-1}, \tilde{\xi}k_0, \xi_{k_0+1}, \dots, \xi_n)$olmak üzere $[a,b]$ nin işaretlenmiş $(P,\tilde{\xi})$ parçalanması için

$$\left|R(f,P,\tilde{\xi})\right| = \left|\sum_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k + f(\xi_{k_0})\Delta x_{k_0}\right| \geq \left|f(\xi_{k_0})\right|\Delta x_{k_0} - \left|\sum_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\right| > A$$

olur. Buna göre, eğer f, $[a,b]$ üzerinde sınırsız ise herhangi $A > 0$ sayısı ve $[a,b]'$ nin herhangi bir P parçalanması için öyle bir $\tilde{\xi}\, n$ ' lisi bulunabilir ki, $\left|R(f,P,\tilde{\xi})\right| > A$ olur. Bu da f fonksiyonunun $[a,b]$ üzerinde integrallenemez olduğunu gösterir.

Sonuç 1.1.6 : $\mathcal{R}[a,b] \subset B[a,b]dir.$

Not: $[a,b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olması için f fonksiyonunun $[a,b]$ de sınırlı olması koşulu gereklidir, fakat yeterli değildir. Örneğin,

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin [a,b] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı Dirichlet fonksiyonu $D: [a,b] \to \{0,1\}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sınırlıdır fakat integrallenebilir değildir. Gerçekten, $[a,b]$ aralığının herhangi bir $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanması için $\tilde{\xi}_k \in [x_{k-1}, x_k]$ rasyonel ve $\tilde{\tilde{\xi}}_k \in [x_{k-1}, x_k]$ irrasyonel sayılar olmak üzere

$$R(D,P,\tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{n} D(\tilde{\xi}_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 1\Delta x_k = b - a,$$

$$R\left(D,P,\tilde{\tilde{\xi}}\right) = \sum_{k=1}^{n} D\left(\tilde{\tilde{\xi}}_k\right)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 0\Delta x_k = 0$$

olduğundan $b - a \neq 0$ durumunda $\lim\limits_{\|p\|\to 0} R(D,P,\xi)$ limiti yoktur. Buna göre, verilen D fonksiyonu her $[a,b]$ aralığı üzerinde integrallenemezdir.

İleride, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı reel ve sınırlı fonksiyonların $[a,b]$ üzerinde Riemann anlamında integrallenebilir olması için gerekli ve yeterli koşulu inceleyeceğiz.

Tanım 1.1.7 : $[a,b]$ aralığının iki parçalanması P_1 ve P_2 olsun. Eğer $P_1 \subset P_2$ ise P_2 ye P_1 in incelmesi veya P_1' e $P_2{}'$ den kaba denir. Bu durumda $\|P_2\| \leq \|P_1\|$ olduğu açıktır.

Örneğin, $[a,b]$ aralığının $P_1 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$ ve $P_2 = \{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1\}$ parçalanmaları için $P_1 \subset P_2$ olduğundan, P_2 , P_1 in incelmesidir ve $\|P_2\| = \frac{1}{6} < \frac{1}{3} = \|P_1\|$ dir. $[a,b]$ aralığının iki $P_1 \; ve \; P_2$ parçalanması için $P^* = P_1 \cup P_2$ ise, P^* , $P_1 \; ve \; P_2$ nin ortak incelmesidir.

Teorem 1.1.8 : $P \; ve \; P_0$, $[a,b]$ aralığının iki parçalanması ve $f \in [a,b]$ olsun. Eğer, $P_0 \subset P$ ise

$$A(f,P_0) \leq A(f,P) \text{ ve } \ddot{U}(f,P) \leq \ddot{U}(f,P_0)$$

dir.

İspat: İspatı önce şu hal için yapalım. $[a,b]$ nin $P_0 = \{x_0, x_1, \dots, x_{k_0-1}, x_{k_0}, \dots, x_n\}$ ve $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{k_0-1}, x^*, x_{k_0}, \dots, x_n\}$ parçalanmaları verilsin. $P_0 \subset P$ olduğu açık olup

$$m_k(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \qquad M_k(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\},$$

$$m'_{k_0}(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{k_0-1}, x^*]\}, \qquad M'_{k_0}(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{k_0-1}, x^*]\},$$

$$m''_{k_0}(f) = \inf\{f(x) : x \in [x^*, x_{k_0}]\}, \qquad M''_{k_0}(f) = \sup\{f(x) : x \in [x^*, x_{k_0}]\},$$

denirse, $k = 1, 2, \dots, n$ için $m_k(f) \leq M_k(f)$, $m_{k_0}(f) \leq m'_{k_0}(f), m_{k_0}(f) \leq m''_{k_0}(f)$, $M'_{k_0}(f) \leq M_{k_0}(f)$ ve $M''_{k_0}(f) \leq M_{k_0}(f)$ olduğundan

$$A(f,P) = \sum_{k=1}^{k_0-1} m_k(f)\Delta x_k + m'_{k_0}(f)(x^* - x_{k_0-1}) + m''_{k_0}(f)(x_{k_0} - x^*) + \sum_{k=k_0+1}^{n} m_k(f)\Delta x_k$$

$$\geq \sum_{k=1}^{k_0-1} m_k(f)\Delta x_k + m_{k_0}(f)(x^* - x_{k_0-1}) + m_{k_0}(f)(x_{k_0} - x^*) + \sum_{k=k_0+1}^{n} m_k(f)\Delta x_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\Delta x_k = A(f,P_0)$$

elde edilir. Benzer şekilde, $\ddot{U}(f,P) \leq \ddot{U}(f,P_0)$ olduğu gösterilir.

Şimdi kabul edelim ki, P nin P_0 dan r tane fazla noktası olsun. Bu noktalara $x_1^*, \dots, x_r^*$ diyelim. $[a,b]$ aralığının $P_1 = P_0 \cup \{x_1^*\}, P_2 = P_1 \cup \{x_2^*\}, \dots, P_r = P_{r-1} \cup \{x_r^*\}$ parçalanmaları için $P_0 \subset P_1 \subset \cdots P_{r-1} \subset P_r = P$ olduğuna göre, yukarıdaki ispattan

$A(f,P_0) \leq A(f,P_1) \leq \cdots A(f,P_r) = A(f,P)$ ve $\ddot{U}(f,P_0) \geq \ddot{U}(f,P_1) \geq \cdots \geq \ddot{U}(f,P_r) = \ddot{U}(f,P)$ eşitsizlikleri, dolayısıyla,

$$A(f,P_0) \leq A(f,P)\ ve\ \ddot{U}(f,P) \leq \ddot{U}(f,P_0)$$

eşitsizliklerinin doğru olduğu elde edilir.

Teorem 1.1.9 : $P_1\ ve\ P_2, [a,b]$ aralığının herhangi iki parça alınması ve $f \in B[a,b]$ olsun. Bu durumda,

$$A(f,P_1) \leq \ddot{U}(f,P_2)$$

dır.

İspat: $P^* = P_1 \cup P_2$ olsun $P^*, P_1\ ve\ P_2$ parçalanmalarının ortak incelmesi olduğundan Teorem 1.1.8 den dolayı

$$A(f,P_1) \leq A(f,P^*) \text{ ve } \ddot{U}(f,P^*) \leq \ddot{U}(f,P_2)$$

yazılabilir. Öte yandan P^* parçalanması için (1.3)'e göre $A(f,P^*) \leq \ddot{U}(f,P^*)$ olduğundan son eşitsizlikten $A(f,P_1) \leq \ddot{U}(f,P_2)$ yazılabilir.

Sonuç 1.1.10 : $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon ve $m(f) = inf\{f(x): x \in [a,b]\}\ ve\ M(f) = sup\{f(x): x \in [a,b]\}$ olsun. Bu durumda $[a,b]$ aralığının her $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanması için

$$m(f)(b-a) \leq A(f,P) \leq \ddot{U}(f,P) \leq M(f)(b-a) \tag{1.6}$$

dir.

Gerçekten, $\forall k = 1, \dots, n\ için\ m_k(f) \geq m(f)\ ve\ M_k(f) \leq M(f)$ olduğundan ($E, F \subset \mathbb{R}$ ve $E \subset F$ için $infE \geq infF, supE \leq supF$)

$$A(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\Delta x_k \geq \sum_{k=1}^{n} m(f)\Delta x_k = m(f)(b-a),$$

$$\ddot{U}(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} M(f)\Delta x_k = M(f)(b-a)$$

yazılabilir. (1.3) ten dolayı $A(f,P) \leq \ddot{U}(f,P)$ olduğundan, (1.6) eşitliğinin doğruluğu anlaşılır.

Sonuç 1.1.11 : $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon ve (P_n) de $[a, b]$aralığının parçalanmalarının artan bir dizisi (yani, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $P_n \subset P_{n+1}$) olsun. $(A(f, P_n))$ alt toplamlar dizisi azalmayan ve üstten sınırlı, $\ddot{U}(f, P_n))$ üst toplamlar dizisi artmayan ve alttan sınırlıdır.

Gerçekten, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $P_n \subset P_{n+1}$ olduğundan, Teorem 1.1.8 den dolayı $A(f, P_n) \leq A(f, P_{n+1})$ ve $\ddot{U}(f, P_{n+1}) \leq \ddot{U}(f, P_n)$ yazılabilir. Buna göre ve Sonuç 1.1.10 a göre (1.6) ile $\big(A(f, P_n)\big)$ dizisi azalmayan ve üstten sınırlı, $(\ddot{U}(f, P_n))$ dizisi ise artmayan ve alttan sınırlıdır.

Teorem 1.1.12 : $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon ve $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $[a, b]$ nin herhangi bir parçalanması olsun. Bu durumda,

$$\ddot{U}(f, P) - A(f, P) = \sum_{k=1}^{n} w_k(f) \Delta x_k \tag{1.7}$$

dır. Burada,

$$w_k(f) = w(f, [x_{k-1}, x_k]) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

f fonksiyonunun $[x_{k-1}, x_k]$ aralığı üzerindeki salınımıdır.

İspat: $X \subset \mathbb{R}, Y \subset \mathbb{R}$ ve $Z = \{z = x - y : x \in X, y \in Y\}$ kümeleri için $supZ = supX - infY$ olduğundan,

$$\begin{aligned} M_k(f) - m_k(f) &= sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} - inf\{f(y) : y \in [x_{k-1}, x_k]\} \\ &= sup\{f(x) - f(y) : x, y \in [x_{k-1}, x_k]\} \\ &= sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [x_{k-1}, x_k]\} \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan, (1.7) eşitliğinin doğruluğu anlaşılır.

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ aralığının bütün mümkün $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanmalarından oluşan bir küme olsun. Sonuç 1.1.10 dan dolayı $\{A(f, P) : P \in \mathcal{P}\}$ kümesi üstten ($\forall P \in \mathcal{P}$ $için$ $A(f, P) \leq M(f)(b - a)$), $\{\ddot{U}(f, P) : P \in \mathcal{P}\}$ kümesi alttan ($\forall P \in \mathcal{P}$ $için$ $\ddot{U}(f, P) \geq m(f)(b - a)$) sınırlı bir reel sayı kümesidir. Bu nedenle, bu kümelerin sırasıyla supremumu ve infimumu vardır.

Tanım 1.1.13 : $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. $\underline{I} = sup\{A(f, P) : P \in \mathcal{P}\}$ ve $\overline{I} = \inf\{\ddot{U}(f, P) : P \in \mathcal{P}\}$ sayılarına f fonksiyonunun $[a, b]$ üzerindeki sırası ile alt integrali ve üst integrali denir.

Teorem 1.1.14 : $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $\underline{I} \leq \overline{I}$ dır.

İspat: $[a,b]$ aralığının herhangi iki P_1 ve P_2 parçalanmaları verilsin. Teorem 1.1.9 dan dolayı

$$A(f,P_1) \leq \ddot{U}(f,P_2)$$

yazılabilir. P_2 parçalanmasını sabit tutarak P_1 in $\mathcal{P}$ kümesi üzerinde değişmesi halinde elde edilen $\{A(f,P_1): P_1 \in \mathcal{P}\}$ kümesi üstten sınırlı olduğundan, ($E \subset \mathbb{R}$ alt kümesi ve $B \subset \mathbb{R}$ sayısı için $\forall x \in E, x \leq B$ olduğundan $supE \leq B$ dir.)

$$\underline{I} = \sup\{A(f,P_1): P_1 \in \mathcal{P}\} \leq \ddot{U}(f,P_2)$$

dır. Buna göre, $\{\ddot{U}(f,P_2): P_2 \in \mathcal{P}\}$ kümesi alttan sınırlı olduğundan ($F \in \mathbb{R}$ alt kümesi ve $c \in \mathbb{R}$ sayısı için $\forall x \in F, x \geq c$ olduğundan $infF \geq c$ dir)

$$\overline{I} = \inf\{\ddot{U}(f,P_2): P_2 \in \mathcal{P}\} \geq \underline{I}$$

olduğu elde edilir.

Not: $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon, (P_n) de $[a,b]$ aralığının $\lim_{n\to\infty} \|P_n\| = 0$ olacak şekilde parçalanmalarının artan bir dizisi olsun. Sonuç 1.1.11 den dolayı $(A(f,P_n))$ alt toplamlar dizisi azalmayan ve üstten sınırlı, $(\ddot{U}(f,P_n))$ üst toplamlar dizisi artmayan ve alttan sınırlı olduğundan, monoton dizi özelliklerine göre bu dizilerin birer limitleri vardır. Bu nedenle sınırlı $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $[a,b]$ üzerindeki alt ve üst integralleri sırası ile

$$\underline{I} = \lim_{n\to\infty} A(f,P_n) = \sup\{A(f,P_n): n \in \mathbb{N}\}$$

$$\overline{I} = \lim_{n\to\infty} \ddot{U}(f,P_n) = \inf\{\ \ddot{U}(f,P_n: n \in \mathbb{N}\}$$

gibi tanımlanabilir.

Teorem 1.1.15 : $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki önermeler denktirler.

$(a)\ \underline{I} = \overline{I}$

(b) $\forall \varepsilon > 0$ için $[a,b]$ aralığının

$$\ddot{U}(f,P) - A(f,P) < \varepsilon \tag{1.8}$$

olacak şekilde bir$P = P_\varepsilon$ parçalanması vardır.

(c) $\lim\limits_{\|P\|\to 0} R(f,P,\xi) = I = \int_a^b f(x)dx$ limiti vardır ve $I = \underline{I} = \overline{I}$ dir.

İspat: $(a) \Rightarrow (b)$ $\underline{I} = \overline{I}$ olsun ve herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $\underline{I}$ ve $\overline{I}$ nin tanımından dolayı $[a,b]$ aralığının öyle P_1 ve P_2 parçalanmaları vardır ki (infimum ve supremumun karakteristik özelliklerinden dolayı)

$$\underline{I} - A(f,P_1) < \frac{\varepsilon}{2} \ ve \ \text{Ü}(f,P_2) - \overline{I} < \frac{\varepsilon}{2}$$

yazılabilir. P, P_1 ve P_2 parçalanmalarının ortak incelmesi olsun. O halde, Teorem 1.1.8 den ve son iki eşitlikten

$$\text{Ü(f}, P) \le \text{Ü}(f,P_2) < \overline{I} + \tfrac{\varepsilon}{2}$$

$$= \underline{I} + \tfrac{\varepsilon}{2} < A(f,P_1) + \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2}$$

$$= A(f,P_1) + \varepsilon \le A(f,P) + \varepsilon$$

yazılabilir. Buradan, $[a,b]$ aralığının P parçalanması için (1.8) eşitliğinin sağlandığı görülür.

$(b) \Rightarrow (a)$ Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun. $[a,b]$ aralığının

$$\text{Ü}(f,P_*) - A(f,P_*) < \varepsilon \tag{1.9}$$

olacak şekilde bir $P_* = \{x_0^*, x_1^*, \dots, x_n^*\}$ parçalanmasının var olduğunu varsayalım. Teorem 1.1.14 ten dolayı $\forall P \in \mathcal{P}$ parçalanması için

$$A(f,P) \le \underline{I} \le \overline{I} \le \text{Ü}(f,P)$$

olduğuna göre (1.8) eşitsizliğini gerçekleyen $P_* \in \mathcal{P}$ parçalanması için

$$0 \le \overline{I} - \underline{I} \le \text{Ü}(f,P_*) - A(f,P_*) < \varepsilon$$

bulunur. Bu durum $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ sayısı için sağlanabileceğinden $\underline{I} = \overline{I}$ olmalıdır.

$(b) \Rightarrow (c)$ Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve (1.9) eşitsizliğini gerçekleyen bir $P_* \in \mathcal{P}$ parçalanması verilmiş olsun. Bu durumda $\underline{I} = \overline{I}$ olup $\delta_1 = \min\left\{\frac{1}{2}\Delta x_k^* = \frac{1}{2}(x_k^* - x_{k-1}^*) : k = 1, \dots, n^*\right\}$ ve $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{4n^* M(f)}$ olmak üzere herhangi bir $0 < \delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ sayısı alınsın. $[a,b]$ aralığının $\|P\| < \delta$ olacak şekilde herhangi bir $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanmasını göz önüne alalım. $P_* \subset P$ olduğu açıktır. $E = \{k \in \{1, \dots, n\}$ herhangi bir $i \in \{1, \dots, n\}$ için $x_i^* \in [x_{k-1}, x_k]\}$ ve $F = \{1, 2, \dots, n\} \backslash E$ olsun. Bu durumda,

$$\text{Ü}(f,P) - A(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\Delta x_k$$

$$= \sum_{k\in E}[M_k(f) - m_k\,(f)]\Delta x_k + \sum_{k\in F}[M_k(f) - m_k(f)\Delta x_k$$

yazılabilir.

a ve b noktaları hem P_*, hem de P parçalanmasına ait olduğundan P_* parçalanmasının P parçalanmasının alt aralıklarının içine düşen noktalarının sayısı en fazla $n_* - 1$ dir (böyle aralıkların sayısı en fazla $2n_* - 2$ dir). Şu halde,

$$\sum_{k\in E}[M_k(f) - m_k\,(f)]\Delta x_k \leq [M(f) - m(f)]\sum_{k\in E}\Delta x_k < [M(f) - m(f)]2n_*\|P\|$$

$$< [M(f) - m(f)]2n_*\frac{\varepsilon}{4n_*M(f)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

ve $M_k(f) - m_k(f) \leq 2M(f)$ olduğundan dolayı

$$\sum_{k\in F}[M_k(f) - m_k(f)\Delta x_k \leq 2M(f)\sum_{k\in F}\Delta x_k \leq M(f)(n_* - 1)\|P\|$$

$$< 2M(f)\frac{n_* - 1}{4n_*M(f)}\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Buna göre, $[a,b]$ aralığının $\|P\| < \delta$ olacak şekilde herhangi işaretlenmiş bir (P,ξ) parçalanması verilmiş olsun. Buna durumda,

$$A(f,P) \leq R(f,P,\xi\,) \leq \text{Ü}(f,P) \;\text{ ve }\; A(f,P) \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq \text{Ü}(f,P)$$

olduğundan, $I = \underline{I} = \overline{I}$ dersek

$$|R(f,P,\xi) - I\,| \leq \text{Ü}(f,P) - A(f,P) < \varepsilon$$

yazılabilir. Böylece, $(b) \Rightarrow (c)$ önermesinin doğruluğu ispatlanmış olur.

$(c) \Rightarrow (b)$ Tanım 1.1.3 ten $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists\delta > 0$ vardır öyle ki, $[a,b]$ nin $\|P\| < \delta$ olacak şekilde herbir işaretlenmiş (P,ξ) parçalanması için

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k < I + \frac{\varepsilon}{3}$$

olur. Buradan,

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leq A(f,P) \leq \ddot{U}(f,P) \leq \ I + \frac{\varepsilon}{3}$$

ve dolayısıyla $[a,b]$ aralığının $\|P\| < \delta$ olacak şekilde de $P \in \mathcal{P}$ parçalanması için $\ddot{U}(f,P) - A(f,P) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \ \varepsilon$ olur. Bu da (b) koşulunu sağladığını gösterir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Bu teoremi şu şekilde de ifade edebiliriz.

Teorem 1.1.16 : Sınırlı bir $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $[a,b]$ üzerinde integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşullardan birinin sağlanmasıdır.

(1) $\underline{I} = \overline{I}$ (Darboux Koşulu)

(2) $\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ için$

$$\ddot{U}(f,P) - \ A(f,P) = \sum_{k=1}^{n} w_k(f)\Delta x_k < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $P \in \mathcal{P}$ parçalanması vardır (Riemann Koşulu).

Sonuç 1.1.17 : $P_n \in \mathcal{P},\ P_n \subset P_{n+1}(n \in \mathbb{N})\ ve\ \lim_{n\to\infty}\|P_n\| = 0$ koşullarını sağlayan bir (P_n) dizisi için $\left(P_n = \left\{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}\right\}, \xi_k^n \in \left[x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}\right], \Delta x_k^{(n)} = x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}, k = 1, \dots, n\right)$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\ \xi_k^{(n)})\ \Delta x_k^{(n)} = I \tag{1.10}$$

limiti varsa

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

integrali vardır.

Not: Sonuç 1.1.17 den görüldüğü gibi $\int_a^b f(x)dx$ integralinin varolması için $P_n \subset P_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ ve $\lim_{n\to\infty}\|P_n\| = 0$ koşullarını sağlayan herhangi bir (P_n) dizisi için (1.10) limitinin var olduğunu göstermek yeterlidir. Örneğin, böyle bir (P_n) dizisi olarak terimleri $P_n = \{x_k^{(n)} = a + \frac{b-a}{n}k : k = 0,1,\dots,n\}$ şeklinde tanımlı (P_n) dizisi (yani $[a,b]$ nin düzgün parçalanmalarından oluşan dizi) alınabilir.

1.2 İntegrallenebilen Bazı Fonksiyon Sınıfları

Tanım 1.2.1 : $X \subset \mathbb{R}, f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer, $\forall \varepsilon > 0$ sayısı ve $\forall x_1, x_2 \in X$ noktaları için

$$|x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

olacak şekilde yalnızca ε na bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayısı varsa, f fonksiyonu X üzerinde düzgün süreklidir denir.

Teorem 1.2.2 (Düzgün Süreklilik Üzerine Cantor Teoremi): $\mathbb{R}$ nin kompakt (kapalı ve sınırlı) alt kümesi üzerinde sürekli her fonksiyon bu küme üzerinde düzgün süreklidir.

İspat: Kabul edelim ki, kapalı ve sınırlı bir $X \subset \mathbb{R}$ kümesinde sürekli bir $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde düzgün sürekli değildir. O halde, $\exists_{\varepsilon_0} > 0$ öyleki $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$|x_n' - x_n''| < \frac{1}{n} \tag{1.11}$$

ve

$$|f(x_n') - f(x_n'')| \geq \varepsilon_0 \tag{1.12}$$

olacak şekilde $x_n', x_n'' \in X$ noktaları vardır. (x_n') dizisi sınırlı olduğuna göre, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}' = x_0$ olsun. X kapalı olduğundan dolayı $x_0 \in X$ dir. $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\left|x_{n_k}'' - x_0\right| \leq \left|x_{n_k}'' - x_{n_k}'\right| + \left|x_{n_k}' - x_0\right|$$

$$\leq [(1.11) \text{ den dolayı}]$$

$$\leq \frac{1}{n_k} + \left|x_{n_k}' - x_0\right|$$

dır. $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$ ve $\lim\limits_{k\to\infty}\left|x_{n_k}' - x_0\right| = 0$ olduğuna göre, son eşitsizlikten

$$\lim_{k\to\infty}\left|x_{n_k}'' - x_0\right| = 0 \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} x_{n_k}'' = x_0$$

bulunur. f fonksiyonu x_0 noktasında sürekli olduğundan,

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}') = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}'') = f(x_0)$$

olur. Buna göre,

$$\lim_{k\to\infty}\left|f\left(x'_{n_k}\right)-\lim_{k\to\infty}f\left(x'_{n_k}\right)\right|=|f(x_0)-f(x_0)|=0$$

bulunur. Bu (1.12) e göre $\forall k\in\mathbb{N}$ için $\left|f\left(x'_{n_k}\right)-f\left(x''_{n_k}\right)\right|\geq\varepsilon$ ile çelişir. Buna göre, f, X üzerinde düzgün süreklidir.

Teorem 1.2.3 : $[a,b]$ aralığında sürekli her fonksiyon bu aralık üzerinde integrallenebilirdir, yani $\mathcal{C}[a,b]\subset\mathcal{R}[a,b]$ dir.

İspat: $[a,b]$ aralığında sürekli bir $f:[a,b]$ fonksiyonu verilsin ve $w_f:(0,b-a]\to\mathbb{R}^+, f$ fonksiyonunun süreklilik modülü olsun. Teorem 1.2.2 den dolayı f fonksiyonu $[a,b]$ de düzgün sürekli ve dolayısıyla, $\lim_{\delta\to0^+}w_f(\delta)=0$ olduğundan, $\forall\,\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ için $\exists\delta_\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ vardır öyleki her$0<\delta<\delta_\varepsilon$ için $w_f(\delta)<\frac{\varepsilon}{(b-a)}$ dir. $0<\delta<\delta_\varepsilon$ olmak üzere $[a,b]$ aralığının $\|P\|<\delta$ olacak şekilde bir $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ parçalanması verilsin. Bu durumda, $\xi_k,\eta_k\in[x_{k-1},x_k]$ için

$$|\xi_k-\eta_k|\leq\delta\Rightarrow|f(\xi_k)-f(\eta_k)|\leq w_k(f)$$

$$=\max\{|f(x)-f(y)|:x,y\in[x_{k-1},x_k]\}\leq w_f(\delta)$$

yazılabilir. Buna göre, $\|P\|<\ \delta$ olacak şekilde $P\in\mathcal{P}$ parçalanması için

$$\text{Ü}(f,P)-A(f,P)=\sum_{k=1}^{n}[M_k(f)-m_k(f)]\Delta x_k$$

$$[M_k(f)-m_k(f)=w_k(f)\leq w_f(\delta)\text{ olduğundan}]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}w_k(f)\,\Delta x_k\leq\sum_{k=1}^{n}w_f(\delta)\,\Delta x_k=w_f(\delta)(b-a)<\ \varepsilon$$

elde edilir. Böylece, $\forall\,\varepsilon\in\mathbb{R}_+\ için\ \exists\,\delta>0$ öyleki, $[a,b]$ nin $\|P\|<\delta$ olacak şekilde $P\in\mathcal{P}$ parçalanması için $\text{Ü}(f,P)-A(f,P)<\ \varepsilon$ olur. Teorem 1.1.15 e göre $f\in\ \mathcal{R}[a,b]$ dir.

Teorem 1.2.4 : $[a,b]$ aralığında monoton(artan veya azalan) her fonksiyon bu aralık üzerinde integrallenebilirdir.

İspat: $f:[a,b]\to\ \mathbb{R}$ fonksiyonu monoton azalan olsun. O halde $f(a)-f(b)>0$ dır. Herhangi $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ sayısı için $[a,b]$ aralığının $\|P\|<\frac{\varepsilon}{f(a)-f(b)}$ olacak şekilde bir $P=$

$\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanmasını göz önüne alalım. Monoton azalan $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$fonksiyonu için

$$m_k(f) = f(x_k) \qquad \text{ve} \qquad M_k(f) = f(x_{k-1})$$

olacağından,

$$\sum_{k=1}^{n} w_k(f)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} [f(x_{k-1}) - f(x_k)]\Delta x_k$$

$$\leq \|P\| \sum_{k=1}^{n} [f(x_{k-1}) - f(x_k)] = \|P\|(f(a) - f(b)) < \varepsilon$$

bulunur. Riemann koşulu gerçeklendiğinden $f \in \mathcal{R}[a,b]$ dir.

Teorem 1.2.14 : $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ olsun. Bu durumda,

(a) $f + g \in \mathcal{R}[a,b]$

(b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha f \in \mathcal{R}[a,b]$.

(c) $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$.

(d) $[c,d] \subset [a,b]$ ise $f|_{[c,d]} \in \mathcal{R}[c,d]$.

(e) $fg \in \mathcal{R}[a,b]$.

(f) $\forall x \in [a,b]$ için $|g(x)| \geq \beta > 0$ ise $\frac{1}{g} \in \mathcal{R}[a,b]$.

İspat: (a) $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ ve $F = f + g$ olsun. Teorem 1.1.5 ten dolayı $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde sınırlıdır. $F \in \mathcal{R}[a,b]$ olduğunu görelim. $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ ise $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır öyleki $[a,b]$ nin $\|P\| < \delta$ olacak şekilde her $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanması için

$$\sum_{k=1}^{n} w_k(f)\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2} \;\; ve \;\; \sum_{k=1}^{n} w_k(g)\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2}$$

yazılabilir. Her $k = 1, 2, \dots, n$ için

$$w_k(F) = \sup\{|F(x) - F(y)| : x, y \in [x_{k-1}, x_k]\} \leq w_k(f) + w_k(g)$$

olduğundan, $[a,b]$ nin $\|P\| < \delta$ olacak şekilde P parçalanması için

$$\sum_{k=1}^{n} w_k(F)\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} w_k(f)\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} w_k(g)\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Bu da Riemann koşuluna göre, $F = f + g \in \mathcal{R}[a, b]$ olduğu demektir.

(b) $[a, b]$ aralığının işaretlenmiş her (P, ξ) parçalanması için

$$R(\alpha f, P, \xi) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha f)(\xi_k)\Delta x_k = \alpha\, R(f, P, \xi)$$

olduğuna göre limite geçildiğinde, $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ise $\alpha f \in \mathcal{R}[a, b]$ olduğu görülür.

(c) $[a, b]$ aralığının her $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanması için

$$w_k(|f|) = \sup\{||f(x)| - |f(y)||: x, y \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$\leq \sup\{|f(x) - f(y)|: x, y \in [x_{k-1}, x_k]\} = w_k(f)$$

olduğundan,

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} w_k(|f|)\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} w_k(f)\Delta x_k$$

yazabiliriz. Buradan da

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} w_k(f)\Delta x_k = 0 \Longrightarrow \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} w_k(|f|)\Delta x_k = 0$$

olduğu ve dolayısıyla, $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ olduğu görülür.

(d) $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ve $[a, c] \subset [a, b]$ olsun. $F(x) = f(x),\ x \in [a, c]$ tanımıyla $F: [a, c] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $[a, c]$ üzerinde Riemann anlamında integrallenebilen olduğunu görelim. $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ise $f, [a, b]$ üzerinde sınırlıdır. Buna göre, F fonksiyonu $[a, c]$ üzerinde sınırlıdır. $[a, c]$ aralığının herhangi bir $P' = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}, (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = c)$ parçalanması verilsin. $\|P'\| = \max\{\Delta x_k, k = 1, 2, \dots, m\}\ ve\ x_m < x_{m+1} < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, olmak üzere $[a, b]$ aralığının $\|P\| = \max\{\Delta x_k, k = 1, 2, \dots, m\} < \|P'\|$ olacak şekilde bir P =$\{ x_0, x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n\}$ parçalanmasını göz önüne alalım. O halde, $F|_{[a,c]}$ fonksiyonu için

$$\sum_{k=1}^{m} w_k(f)\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} w_k(f)\Delta x_k$$

yazabiliriz. Bu eşitsizlikte $\|P'\| \to 0$ iken limite geçersek $\|P'\| \to 0$ olduğundan $\|P\| \to 0$ olduğundan $\sum_{k=1}^{n} w_k(f)\Delta x_k \to 0$ yazılır. Buradan

$$\lim_{\|P'\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} w_k(F)\Delta x_k = 0$$

olduğundan dolayı $F|_{[a,c]} \in \mathcal{R}[a,c]$ olduğu görülür.

(e) $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ olsun. $fg \in \mathcal{R}[a,b]$ olduğunu görelim. f ve g nin dolayısı ile fg nin $[a,b]$ de sınırlı olduğu açıktır. $[a,b]$ aralığının herhangi bir $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ parçalanması için

$$w_k(fg) = \sup\{|f(x)g(x) - f(y)g(y)| : x, y \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$= \sup\{|f(x)g(x) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(y)g(y)| : x, y \in [x_{k-1}, x_k]$$
$$\leq M_k(g)w_k(f) + M_k(f)w_k(g) \leq M(g)w_k(f) + M(f)\, w_k(g)$$

olduğundan,

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} w_k(fg)\Delta x_k \leq M(g)\sum_{k=1}^{n} w_k(f)\Delta x_k + M(f)\sum_{k=1}^{n} w_k(g)\Delta x_k$$

yazılabilir. $\|P\| \to 0$ sağ tarafın limiti sıfır olduğundan,

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} w_k(fg)\Delta x_k = 0$$

yani, $fg \in \mathcal{R}[a,b]$ olduğu anlaşılır.

(f) $[a,b]$ aralığının her $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ parçalanması için

$$w_k\left(\frac{1}{g}\right) = \sup\{\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)}\right| : x, y \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$\leq \frac{1}{\beta^2} \sup\{|g(x) - g(y)| : x, y \in [x_{k-1}, x_k]\} = \frac{1}{\beta^2} w_k(g)$$

olduğundan

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} w_k\left(\frac{1}{g}\right)\Delta x_k \leq \frac{1}{\beta^2}\sum_{k=1}^{n} w_k(g)\Delta x_k$$

yazılabilir. Buradan, $g \in \mathcal{R}[a,b]$ olduğundan $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} w_k(g)\Delta x_k = 0$ olur. O zaman son eşitsizlik ile

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} w_k\left(\frac{1}{g}\right)\Delta x_k = 0$$

olup $\frac{1}{g} \in \mathcal{R}[a,b]$ sonucu ortaya çıkar.

Not: (e) ve (f) den $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ ve $\forall x \in [a,b]$ için $|g(x)| \geq \beta > 0$ ise $\frac{f}{g}$ nin de $[a,b]$ de integrallenebilir olduğu elde edilir.

Not: Teorem 1.2.14 deki önermelerin tersi genelde doğru değildir. Örneğin, $D: [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

fonksiyonunun $[0,1]$ üzerinde integrallenemez olduğunu biliyoruz. $[0,1]$ üzerinde integrallenemez $f(x) = D(x)$ ve $g(x) = -D(x)$ fonksiyonlarının toplamı olan $f(x) + g(x) = 0$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde integrallenebilirdir.

Teorem 1.2.15 : $f \in \mathcal{R}[a,b], m = \inf\{f(x): x \in [a,b]\}\, ve\, M = \sup\{f(x): x \in [a,b]\}$ olsun. Eğer $\varphi \in C[m,M]$ ise, $h(x) = \varphi\big(f(x)\big),\ x \in [a,b]$ biçiminde tanımlanan $h = f: [a,b] \to \mathbb{R}$ bileşik fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde integrallenebilirdir.

İspat: $\forall \varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $C = \max\{|\varphi(t)|: t \in [m,M]\}$ olmak üzere $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{(b-a+2C)}$ olsun. $[m,M]$ üzerinde sürekli φ fonksiyonu $[m,M]$ kompakt kümesi üzerinde düzgün sürekli olduğuna göre $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır öyle ki $\forall s, t \in [m,M]$ için

$$|s - t| < \delta \Longrightarrow |\varphi(s) - \varphi(t)| < \varepsilon_1$$

olur. Bu $\delta > 0$ sayısını $0 < \delta < \varepsilon_1$ olacak şekilde seçilirse $f \in \mathcal{R}[a,b]$ olduğundan $[a,b]$ aralığının

$$\ddot{U}(f,P) - A(f,P) = \sum_{k=1}^{n} w_k(f)\Delta x_k < \delta^2$$

olacak şekilde bir P =$\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanması vardır.

$$A = \{k: w_k(f) < \delta\}\ ve\ B = \{k: w_k(f) \geq \delta\}$$

olsun. $k \in A$ için $w_k(h) = M_k(h) - m_k(h) < \varepsilon_1$ olduğunu görelim. $k \in A$ ise $w_k(f) < \delta$ olup $her\ w_k(f) = M_k(f) - m_k(f) = \sup\{|f(x) - f(y)|: x, y \in [x_{k-1}, x_k]\}$ olduğundan $\forall x, y \in [x_{k-1}, x_k]$ için $|f(x) - f(y)| < \delta$ olur.

Buna göre, $\forall s, t \in [m, M]$ için $|s - t| < \delta \Longrightarrow |\varphi(s) - \varphi(t)| < \varepsilon_1$ olacağından $\forall k \in A$ için

$w_k(h) = \sup\{|\varphi(f(x)) - \varphi(f(y))|: x, y \in [x_{k-1}, x_k]\} \leq \varepsilon_1$

olduğu anlaşılır. k $\in B$ için $w_k(h) = \sup\{|\varphi(f(x)) - \varphi(f(y))|: x, y \in [x_{k-1}, x_k]\} \leq \sup\{|\varphi(f(x))|: x, y \in [x_{k-1}, x_k]\} + \sup\{|\varphi(f(y))|: x, y \in [x_{k-1}, x_k]\} \leq 2C$ olduğu açıktır. $[a, b]$ nin her $P = x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanması için

$$\sum_{k=1}^{n} w_k(h)\Delta x_k = \sum_{k\in A} w_k(h)\Delta x_k + \sum_{k\in B} w_k(h)\Delta x_k$$

[$k \in A$ için $w_k(h) \leq \varepsilon_1$ ve $k \in B$ için $w_k(h) \leq 2C$ olduğundan]

$$\leq \varepsilon_1 \sum_{k\in A} \Delta x_k + 2C \sum_{k\in B} \Delta x_k$$

yazabiliriz. $k \in B$ için $w_k(h) \geq \delta$ olduğuna göre,

$$\delta \sum_{k\in B} \Delta x_k \leq \sum_{k\in B} w_k(h)\Delta x_k$$

ve buradan da $f \in \mathcal{R}[a, b]$ onduğundan $\sum_{k=1}^{n} w_k(f)\Delta x_k < \delta^2$ olduğunu dikkate aldığımız da

$$\delta \sum_{k\in B} \Delta x_k < \delta^2 \Longrightarrow \sum_{k\in B} \Delta x_k < \delta$$

bulunur. Buna göre,

$$\sum_{k=1}^{n} w_k(h)\Delta x_k \leq \varepsilon_1(b - a) + 2C\delta < \varepsilon_1(b - a + 2C) = \varepsilon$$

olur. Riemann koşulu sağlandığından $h = f \circ g$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilirdir.

Sonuç 1.2.16 : $f \in \mathcal{R}[a,b] \Longrightarrow \forall\alpha \in \mathbb{R}^+$ için $|f|^\alpha \in \mathcal{R}[a,b]$ dir. Gerçekten, $\forall\alpha > 0$ için $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \varphi(t) = |t|^\alpha$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olduğundan, bu fonksiyon her $[A,B] \subset \mathbb{R}$ üzerinde de süreklidir. Öyleyse, Teorem 1.2.15 e göre $|f(x)|^\alpha = \varphi\big(f(x)\big): [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenebilendir.

Not: Teorem 1.2.13 te φ nin [m, M] üzerinde sürekli integrallenebilir olması koşulunun φ nin [m, M] üzerinde integrallenebilir olması koşulu ile değiştirmesi halinde teoremi doğru olmayabilir.

$$f: [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad \varphi: [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\ ve\ x = \dfrac{m}{n}, (m,n) = 1 \\ 0\ , \qquad\qquad\qquad x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}^t \end{cases}$$

$$\varphi(y) = \begin{cases} 1\ ,\ \ 0 \le y \le 1 \\ 0\ ,\qquad y = 0 \end{cases}$$

fonksiyonlarını alalım. f fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında her bir irrasyonel noktasında sürekli ve bu aralığın her bir rasyonel noktasında süreksiz olduğunu biliyoruz. f sınırlı ve süreksizlik noktalarının sayısı sayılabilir olduğundan, Örnek 1.2.9 den dolayı bu noktalar kümesinin Lebesgue ölçüsü sıfırdır. Buna göre, Teorem 1.2.11 dan dolayı $f \in \mathcal{R}[a,b]$ dir. $\varphi \in \mathcal{R}[a,b]$ olduğu da açıktır. Bununla beraber h= $\varphi \circ f: [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = (\varphi \circ f)(x) = \begin{cases} 1 \quad , \quad x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 \quad , \quad x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}^t \end{cases}$$

bileşke fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde integrallenemezdir.

1.3 Riemann İntegralinin Özellikleri

Teorem 1.3.1 : $f \in \mathcal{R}[a,b]$ için

$(a)\ \int_a^a f(x)dx = 0$

$(b)\ \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$

Teorem 1.3.2 : (a) $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ve $g \in \mathcal{R}[a,b]$ ise $f + g \in \mathcal{R}[a,b]$ ve $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha f \in \mathcal{R}[a,b]$ dir ve

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x)dx, \tag{1.13}$$

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx, \tag{1.14}$$

eşitlikleri doğrudur.

(b) $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ve $a < c < b$ ise $f \in \mathcal{R}[a,c], f \in \mathcal{R}[c,b]$ dir ve

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \tag{1.15}$$

dir. Bu sonuca Riemann integralinin Toplamsallık Özelliği denir.

(c) $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ve $\forall x \in [a,b]$ için $f(x) \geq 0$ ise

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

dır.

(d) $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ve $\forall x \in [a,b]$ için $f(x) > 0$ ise

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

dır.

(e) $f \in \mathcal{R}[a,b], g \in \mathcal{R}[a,b]$ ve $\forall x \in [a,b]$ için $f(x) \leq g(x)$ $\left(veya\; f(x) < g(x)\right)$ ise

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \; (\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx)$$

dir.

(f) $f \in \mathcal{R}[a,b], \forall x \in [a,b]$ için $q \leq f(x) \leq p$ ise

$$q(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq p(b-a) \tag{1.16}$$

dir.

(g) $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ise $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ dir ve

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \tag{1.17}$$

dir.

İspat: (a) $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $g \in \mathcal{R}[a,b]$ için $f+g \in \mathcal{R}[a,b]$ ve $\alpha f \in \mathcal{R}[a,b]$ olduğu Teorem 1.2.14(a) dan bellidir. (1.13) eşitliğinin doğru olduğunu görelim. $[a,b]$ aralığının işaretlenmiş her (P,ξ) parçalanması için

$$R(f+g,P,\xi) = R(f,P,\xi) + R(g,P,\xi) \tag{1.18}$$

yazılabilir. Üstelik, $f \in \mathcal{R}[a,b]$ olduğundan $\lim_{\|P\|\to 0} R(f,P,\ \xi) = \int_a^b f(x)dx$ ve $g \in \mathcal{R}[a,b]$ olduğundan $\lim_{\|P\|\to 0} R(g,P,\ \xi) = \int_a^b g(x)dx$ limitleri mevcut olduğundan, (1.18) eşitliğinde $\|P\| \to 0$ iken limite geçersek $\lim_{\|P\|\to 0} R(f+g,P,\xi)$ limitinin varlığı ve (1.13) eşitliğinin doğruluğu ispatlanmış olur. (1.14) eşitliğinin doğruluğu benzer şekilde gösterilebilir.

(b) $f \in \mathcal{R}[a,b]$ için Teorem 1.2.14(d) den dolayı $f \in \mathcal{R}[a,c]$ ve $f \in \mathcal{R}[c,b]$ dır. (1.15) eşitliğinin doğruluğu için

$f \in \mathcal{R}[a,b]$ olduğundan $\int_a^b f(x)dx$ integrali

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} R(f,P,\ \xi)$$

limiti gibi hesaplandığında $[a,b]$ aralığının bu limitin hesaplanması için kolaylık sağlayan parçalanmalarından kullanabiliriz. Bu nedenle, böyle parçalanmalar olarak $[a,b]$ aralığının c noktası bir bölüm noktası olan parçalanmalarından kullanalım. $[a,b]$ aralığının c noktası bir bölüm noktası olan işaretlenmiş her (P,ξ) parçalanması için $P' = P \cap [a,c], P'' = P \cap [c,b], P = P' \cup P''$ ve $\xi = (\xi', \xi'')$ olmak üzere $(P',\xi') ve\ (P'',\xi'')$ sırası ile $[a,c]$ ve $[c,b]$ aralıklarının işaretlenmiş parçalanmaları olacaktır. Buna göre,

$$R(f,P,\xi) = R(f,P',\xi') + R(f,P'',\xi'') \tag{1.19}$$

eşitlikleri sağlanacaktır. $\|P'\| \leq \|P\|$ ve $\|P''\| \leq \|P\|$ olduğundan $\|P\| \to 0$ iken ve $\|P'\| \to 0$ ve $\|P''\| \to 0$ olur $\lim_{\|P'\|\to 0} R(f,P',\xi') = \int_a^b f(x)dx$ $\lim_{\|P'\|\to 0} R(f,P'',\xi'') = \int_c^b f(x)dx$ limitleri mevcut olduğundan (1.19) eşitliğinde $\|P\| \to 0$ iken limite geçersek (1.15) ifadesinin doğruluğu ispatlanmış olur.

(c) $[a,b]$ aralığının işaretlenmiş her (P,ξ) parçalanması için $f(\xi_k) \geq 0$ ve $\Delta x_k - x_{k-1} > 0$ olduğundan, $R(f,P,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \geq 0$ yazılabilir. Bu durumda, $\lim_{\|P\|\to 0} R(f,P,\xi) = I \geq 0$ olduğunu görelim. $I < 0$ ve $\varepsilon = |I| > 0$ olsun. $\lim_{\|P\|\to 0} R(f,P,\xi) = I \Longrightarrow [a,b]$ aralığının işaretlenmiş öyle bir $(\tilde{P},\tilde{\xi})$ parçalanması vardır ki $\left|R\left(f,\tilde{P},\tilde{\xi}\right) - I\right| < |I| \Longrightarrow R\left(f,\tilde{P},\tilde{\xi}\right) < |I| + I = 0$ olur. Bu da $[a,b]$ nin işaretlenmiş her (P,ξ) parçalanması için $R(f,P,\xi) \geq 0$ olması ile çeliştiğinden $I \geq 0$ dır.

(d) (c) ye göre $I = \int_a^b f(x)dx \geq 0$ dır. $I > 0$ olduğunu görelim. $I = 0$ olsun. Bu durumda,

$$\lim_{\|P\|\to 0} \text{Ü}(f,P) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\,\Delta x_k = 0$$

olduğundan, $\forall \varepsilon_1 > 0$ için $[a,b]$ aralığının öyle bir $P' = \{x_0',\ x_1', \dots, x_n'\}$ parçalanması vardır ki, $0 \leq \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\,\Delta x' < \varepsilon_1(b-a)$ olur. Buna göre, $M_{k_0}(f) = \sup\left\{f(x) \colon x \in \left[x_{k_0-1}', x_{k_0}'\right]\right\} < \varepsilon_1$ olacak şekilde bir $k_0 \in \{1,2,\dots,n\}$ doğal sayısı vardır. Buradan da, $\forall x \in [a_1,b_1] \subset [a,b]$ için $0 < f(x) < \varepsilon_1$ olacak şekilde bir $[a_1,b_1] \subset [a,b]$ alt aralığı var olacaktır. $\int_{a_1}^{b_1} f(x)dx = 0$ dır. Gerçekten (b) den dolayı $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{b_1} f(x)dx + \int_{b_1}^{b} f(x)dx$ ve (c) den dolayı $\int_a^{a_1} f(x)dx \geq 0$ ve $\int_{b_1}^{b} f(x)dx \geq 0$ olduğuna göre $0 = \int_a^b f(x)dx \geq \int_{a_1}^{b_1} f(x)dx \geq 0$ olduğu, dolayısıyla $\int_{a_1}^{b_1} f(x)dx = 0$ olduğu elde edilir. Benzer şekilde, $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$ için $\int_{a_2}^{b_2} f(x)dx = 0\ ve\ \forall x \in [\,a_2\ ,\ b_2]$ için $0 < f(x) <\ \varepsilon_2$ olacak şekilde bir $[a_2,b_2]\ \subset [a_1,b_1]$ alt aralığı elde ederiz. $\mathbb{R}_+$ içinde azalan ve $k \to \infty$ iken $\varepsilon_k \to 0$ koşullarını sağlayan herhangi bir (ε_k) dizisi için bu düşünceleri ard arda devam edersek

(1) $[a_{k+1},b_k] \subset [a_k,b_k], k = 1,2,\dots,$

(2) $\lim_{k\to\infty}(\,b_k - a_k) = 0,$

(3) $\forall x \in [a_k, b_k]$ için $0 < f(x) < \varepsilon_k, k = 1, 2, \dots$ özelliklerine sahip $([a_k, b_k])$ kapalı aralıklar dizisi elde ederiz. iç içe aralıklar prensibi gereğince $\bigcap_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k] = \{c\}$ olacak şekilde $\exists c \in (a, b)$ vardır. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $c \in [a_k, b_k]$ olduğundan, $\forall k \in \mathbb{N}$ için $0 < f(c) < \varepsilon_k$ olacaktır. Burada $k \to \infty$ iken limite geçersek $f(c) = 0$ olduğu elde edilir. Bu ise $\forall x \in [a, b]$ için $f(x) > 0$ olması ile çeliştiğinden $\int_a^b f(x)dx = 0$ hipotezinin yanlış olduğu anlaşılır. Demek ki, $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ve $\forall x \in [a, b]$ için $f(x) > 0$ ise $\int_a^b f(x)dx > 0$ dır.

(e) $f \in \mathcal{R}[a, b], g \in \mathcal{R}[a, b]$ ve $\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \leq g(x)(\,veya\, f(x) < g(x))$ olsun. Bu durumda, $\varphi(x) = g(x) - f(x)$ fonksiyonu için $\varphi \in \mathcal{R}[a, b]$ için $\varphi(x) \geq 0$ $(veya\ \varphi(x) > 0)$ olacağından (c) ye $((d)ye)$ göre $\int_a^b \varphi(x)dx \geq 0$ $(veya\ \int_a^b \varphi(x)dx > 0)$ bulunur. Buradan istenen eşitsizliğin sağlandığı anlaşılır.

(f) $[a, b]$ aralığının işaretlenmiş her (P, ξ) parçalanması için $q\Delta x_k \leq f(\xi_k)\Delta x_k \leq p\Delta x_k, k = 1, \dots, n$ eşitsizlikleri sağlandığından ve $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$ olduğundan dolayı

$$q(b - a) \leq \mathcal{R}(f, P, \xi) \leq P(b - a)$$

yazılabilir. Burada, $\|P\| \to 0$ iken limite geçersek (1.16) eşitsizliğinin doğruluğunu elde ederiz.

(g) $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ olduğu Teorem 1.2.14(c) den bellidir. (1.17) eşitsizliğinin sağlandığını görelim. $\forall x \in [a, b]$ için

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

eşitsizliği sağlandığından ve $|f(x)|, -|f(x)| \in \mathcal{R}[a, b]$ olduğundan, (e) ye göre

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x) \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

dolayısı ile (1.17) eşitsizliğinin doğru olduğu görülür.